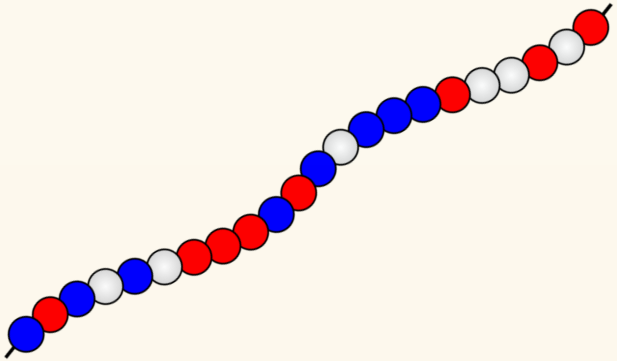
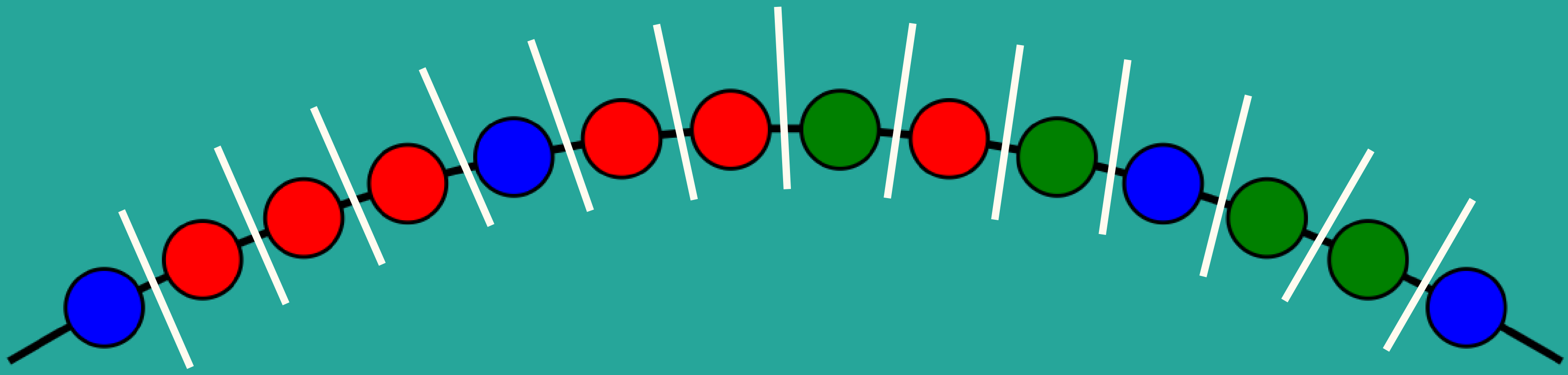
הפקולטה למדעים מדויקים
ע״ש ריימונד ובברלי סאקלר
אוניברסיטת תל אביב



איך לגנוב שרשרת ולהישאר חברים

מרץ 2025

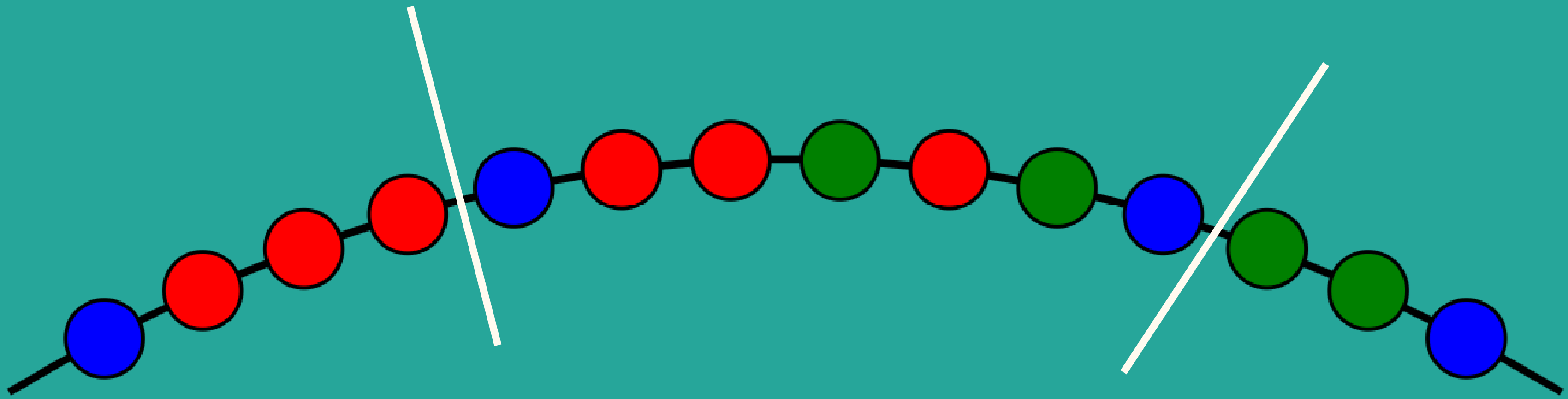
עדן קופרווסר

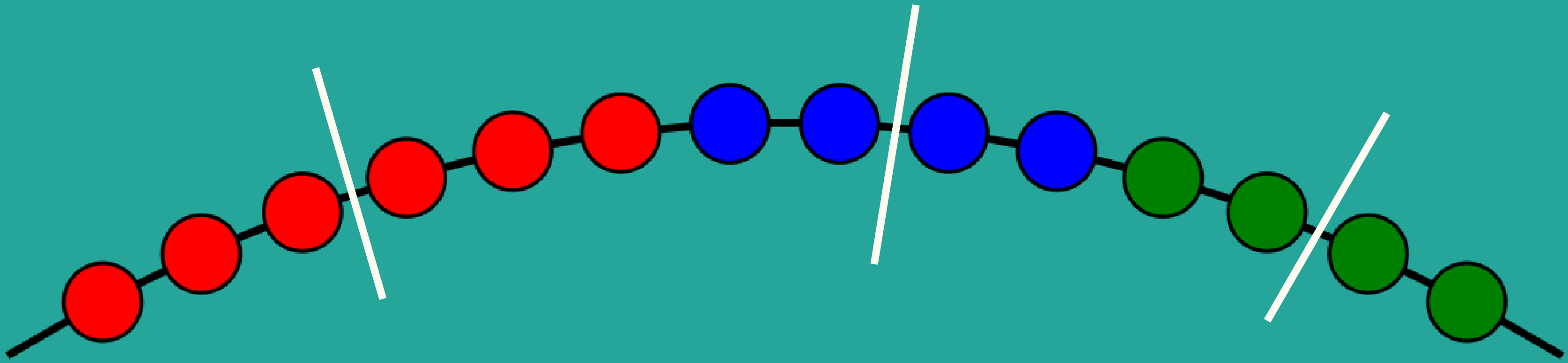


כבודה בין גנבים

- k גנבים
- שרשרת עם t סוגי אבני חן
  - $a(\mathrm{i})\cdot k$ אבנים מסוג i

השאלה: כמה חתכים צריך כדי לחלק בצורה שווה?





ובאופן כללי, חייבים לפחות $t(k\text{-}1)$ חתכים.

Reprinted from ADVANCES IN MATHEMATICS
Vol. 63, No. 3, March 1987

Splitting Necklaces

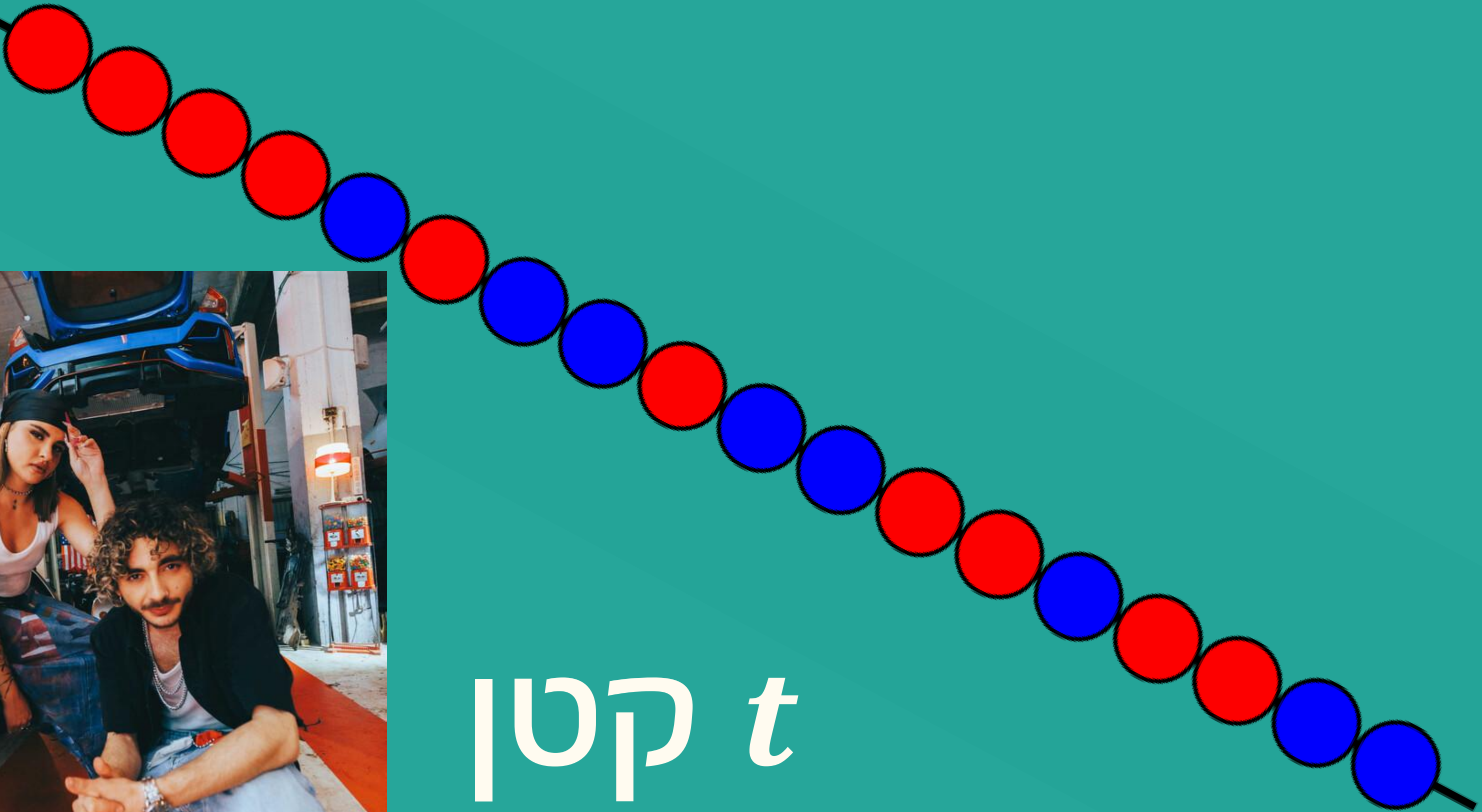
NOGA ALON

Department of Mathematics, Tel Aviv University, Tel Aviv, Israel and Department of Mathematics, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts 02139

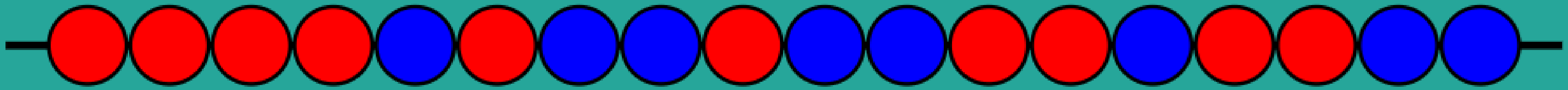
משפט: $t(k\text{-}1)$ תמיד מספיק.

תכנית החלוקה

1. המקרה $t=2$
2. המקרה $k=2$
3. המקרה הכללי

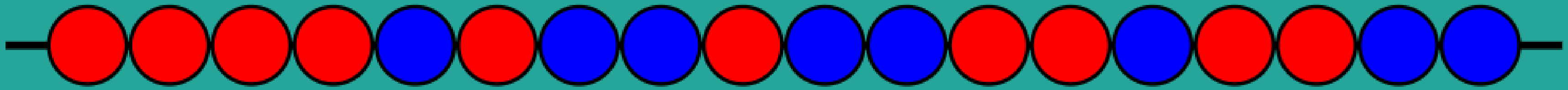


t קטן



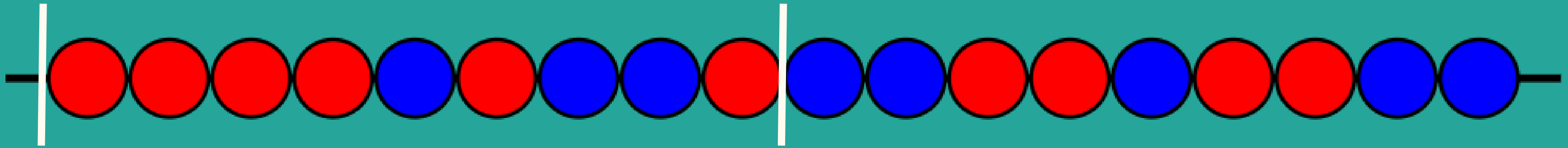
נתבונן במקרה $t=k=2$.

אנחנו מכוונים להצליח בשני חתכים.



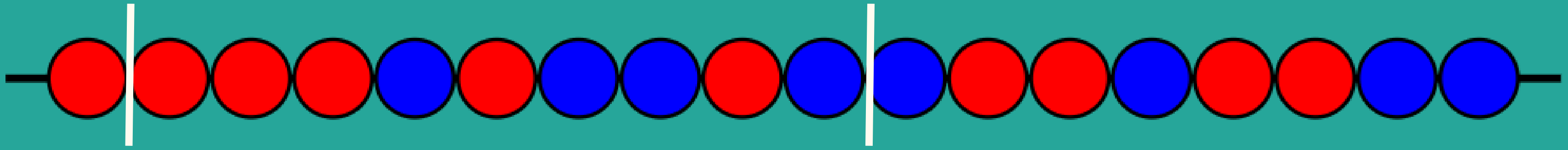
<u>הבחנות</u>:

1. עם שני חתכים, אחד הגנבים יקבל קטע רצוף.
2. הקטע חייב להיות באורך חצי.



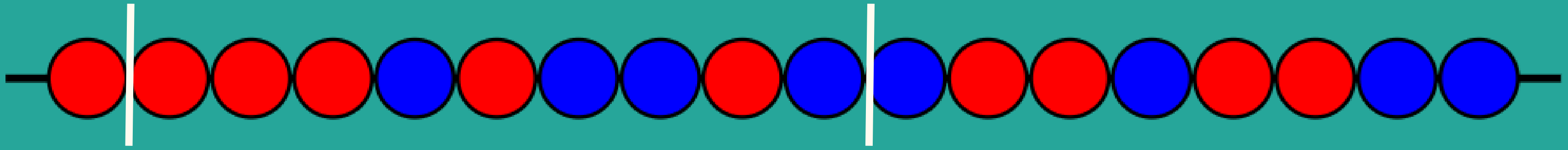
ננסה למצוא קטע עם חצי מאבני האודם.

אם הצד השמאלי מכיל בדיוק חצי, סיימנו.
אם יותר מחצי אז בצד הימני יש פחות (ולהפך).



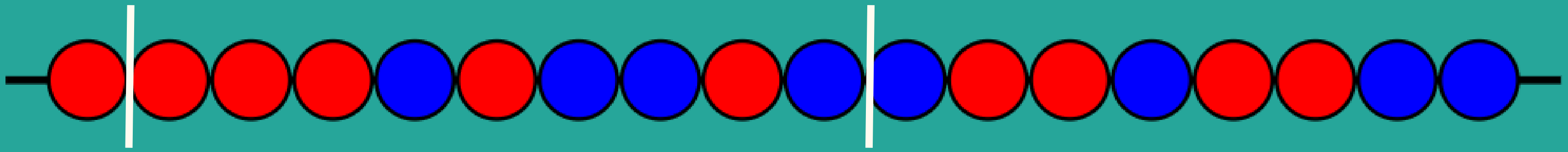
אם נזיז את הקטע צעד ימינה, כמות אבני האודם יכולה:

לעלות ב-1, לרדת ב-1, או לא להשתנות.



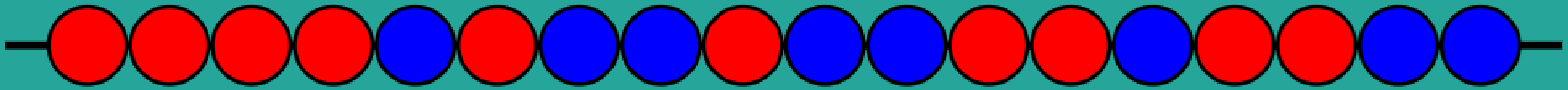
אז אם התחלנו עם יותר מחצי בצד ימין ופחות מחצי בצד שמאל ,באחת ההזזות אמור להיות בדיוק חצי.

עקרון ערך הביניים!



לכאורה דאגנו רק לאבני האודם.

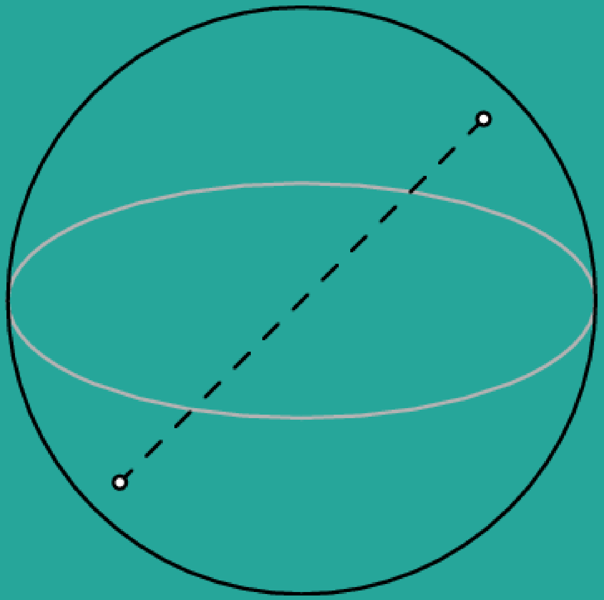
אבל אם יש $2r+2s$ אבנים, ומצאנו קטע באורך
$r+s$ שמכיל r אבני אודם, השאר (s) אבני ספיר.



אותו טריק יעבוד גם ל-k כללי.

אבל הרעיון תלוי בכך ש-$t=2$.

Enter topology



\\ אינטרלוד טופולוגי

<u>רוצים</u>: משפט ערך ביניים עם יותר מימדים

אבל קודם הגדרות

הספירה (sphere) ה-n מימדית היא

$$S^n = \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_0^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$$

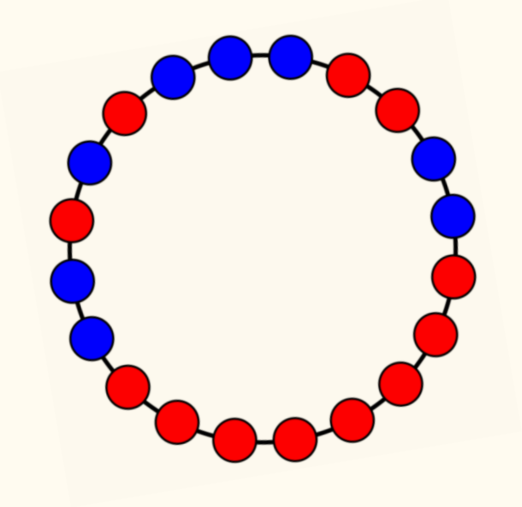
נקודות x ו-y על הספירה נקראות <u>אנטיפודליות</u> אם $x=-y$.

משפט Borsuk–Ulam:

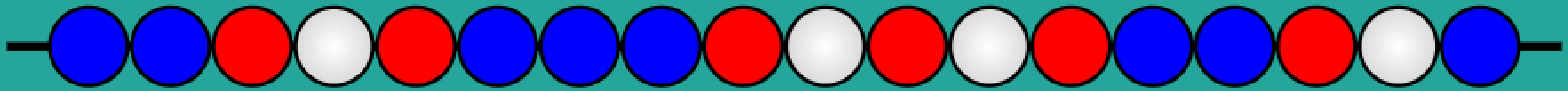
לכל $f\colon S^n \to \mathbb{R}^n$ רציפה קיימת נקודה $x \in S^n$ כך ש- $f(x) = f(-x)$.

הצגה אחרת של הפתרון הקודם

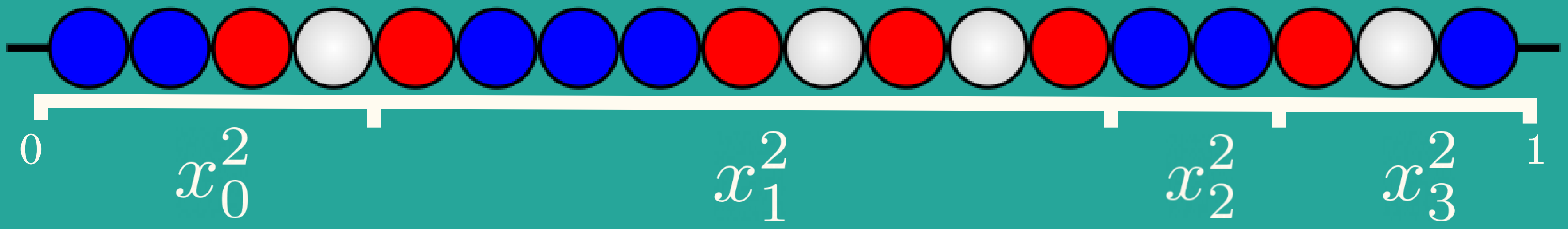
העתקה מהשרשרת הסגורה $f: S^1 \to \mathbb{R}$
שסופרת את כמות אבני האודם בחצי המעגל שמתחיל ב-x.



אז $f(x) = f(-x)$
משמע שני הגנבים מקבלים אותה כמות.



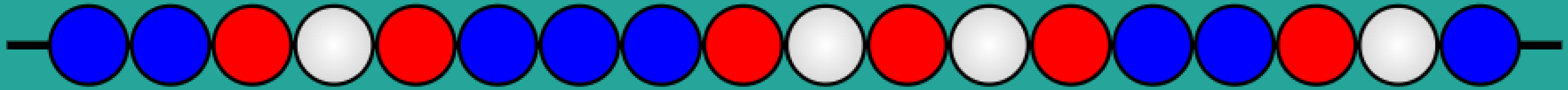
נרצה שכל נקודה $x \in S^t$ תייצג חלוקה של השרשרת לשני הגנבים.



בהינתן נקודה $x \in S^t$ נגדיר את החלוקה לקטעים

באורך $x_0^2, x_1^2, \cdots, x_t^2$. נזכור ש- $\sum x_i^2 = 1$.

הגנב הראשון מקבל את הקטע ה- i $\iff$ $x_i > 0$.

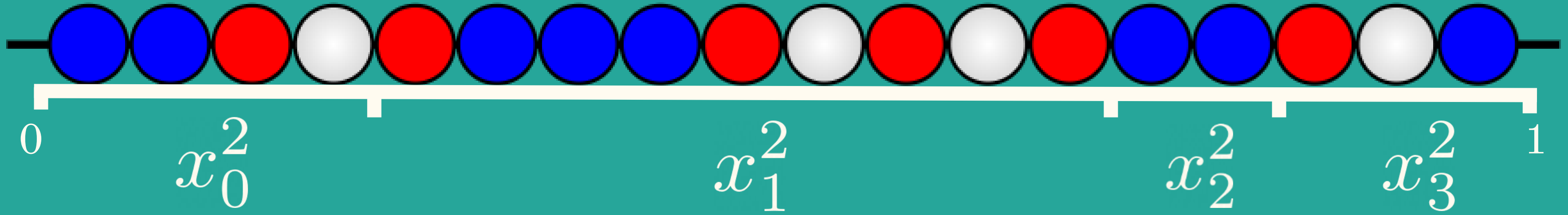


לכל $x \in S^t$ נגדיר את

$$f(x) = \begin{pmatrix} \text{כמות האודם של גנב 1} \\ \text{כמות הספיר של גנב 1} \\ \text{כמות היהלום של גנב 1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^t$$

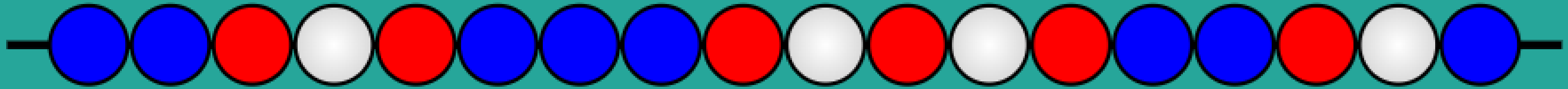
משפט Borsuk–Ulam:

לכל $f\colon S^n \to \mathbb{R}^n$ רציפה קיימת נקודה $x \in S^n$ כך ש- $f(x) = f(-x)$.



בהינתן נקודה $x \in S^t$, הנקודה x -משמרת את כל אורכי הקטעים, אבל מחליפה בין הסימנים.

במילים אחרות, היא מחליפה את השלל בין שני הגנבים.



אם מצאנו $x \in S^t$ כך ש- $f(x) = f(-x)$

אז מצאנו חלוקה שווה בין שני הגנבים!

$$f\colon \left\|(\sigma^N)^{*q}_{\Delta(2)}\right\| \longrightarrow (\mathbb{R}^d)^q_{\Delta}$$

המקרה הכללי

$k > 2$

זאת לא רק טופולוגיה

משפט Borsuk–Ulam בונה על פעולה מסדר 2 שיש בספירה, $x \to -x$.

אנחנו השתמשנו בפעולה הזאת כדי לקודד את הסימטריה בין שני הגנבים.

מה אנחנו רוצים בעצם?

תכלס, יותר סימטריות.

נרצה משפט כמו Borsuk–Ulam שהמסקנה שלו היא שיש התנגשות

$$f(x) = f(\sigma(x)) = \cdots = f(\sigma^{k-1}(x))$$

You can't always get what you want

<u>חדשות טובות</u>: יש משפט כזה!

<u>חדשות רעות</u>: רק כאשר k ראשוני...

But if you try sometimes

אבל מסתבר שזה מספיק לנו.

<u>טענה</u>: אם המשפט נכון ל-a גנבים ול-b גנבים, אז הוא נכון ל-ab גנבים.

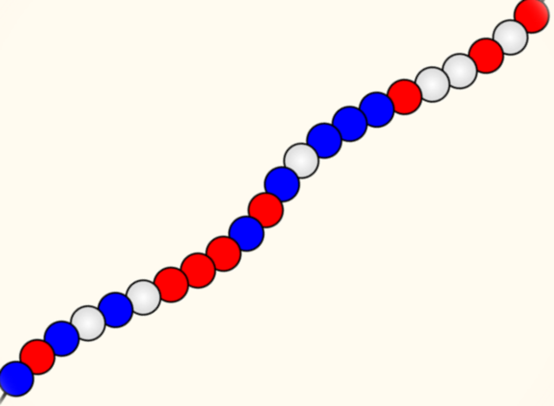
<u>הוכחה</u>: על הלוח

You get what you neeeeeed

נוכיח קודם לכל מספר גנבים ראשוני.

כל k הוא מכפלה של ראשוניים, מסיימים באינדוקציה.

מ.ש.ל



הסוף?

- קיימת חלוקה. כמה קשה למצוא אותה?

- שבירת סימטריה :
  מה אם נרצה לתת לאחד הגנבים 60% ולשני 40%?

- מהן השרשראות שדורשות בדיוק $t(k-1)$ חתכים? האם הן נדירות?
  איך מתנהגת שרשרת אקראית?

- ...

סוף שרשור \\